

## Εξετάσεις Ιουνίου 2020 - Απειροστικός Λογισμός 2

### Διδάσκοντας Χ. Σαρόγλου

**Στοιχειοθεσία Θεμάτων:** Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Κάτοχος Msc)

**ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Όλα τα θέματα είναι ισοβαρή. Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση δεν βαθμολογούνται.

**Θέμα 1** Να εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς. Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

- (i) Μια ακολουθία συγκλίνει αν και μόνο αν κάθε συγκλίνουσα υπακολουθία της, συγκλίνει στο ίδιο όριο.
- (ii) Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία 1-1 συνάρτηση. Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 \in \mathbb{R}$ , τότε και η αντίστροφή της είναι παραγωγίσιμη στο  $f(x_0)$ .
- (iii) Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνεχής και φραγμένη συνάρτηση και  $\{a_n\}$  μια ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια, ώστε  $a_n \rightarrow \infty$ . Τότε, το όριο  $\lim_n f(a_n)$  υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.
- (iv) Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση. Αν η παράγωγος  $f'(1)$  της  $f$  στο σημείο 1 υπάρχει και ισούτε με 0, τότε  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^x) - f(e^{-x})}{x} = 0$ .

### Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ x & , \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Να βρεθούν όλα τα σημεία του  $\mathbb{R}$  στα οποία η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής.

**Θέμα 3** Έστω  $\{a_n\}, \{b_n\}$  δύο ακολουθίες θετικών πραγματικών αριθμών τέτοιες, ώστε  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$  και  $b_n \rightarrow m \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι

$$\lim_n (a_n^n + b_n^n)^{1/n} = \max\{l, m\}.$$

**Θέμα 4** Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  κυρτή και παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η  $f$  λαμβάνει τοπικά μέγιστο σε κάποιο σημείο, να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή στο  $\mathbb{R}$ .

**Θέμα 5** Να βρεθούν, κάνοντας χρήση του  $\varepsilon - n_0$  και  $\varepsilon - \delta$  ορισμού τα παρακάτω όρια.

(i)  $\lim_n \frac{n^2 - 1}{n^3}$ .

(ii)  $\lim_{x \rightarrow 2} (5x^2 - 4x + 3)$ .